Zum Gedankenexperiment von Einstein, Podolsky und Rosen*

M. Weber

Institut für Theoretische Physik der Universität zu Köln, Köln, Germany

(Z. Naturforsch. **32 a**, 223–228 [1977]; eingegangen am 26. Januar 1977)

On the Einstein-Podolsky-Rosen Gedankenexperiment

The EPR-gedankenexperiment in the general case of systems with angular momentum of arbitrary magnitude is analyzed within the quantum theoretical measuring process. With respect to the time reversal symmetry of the systems under consideration it will be shown that the contradictions between the EPR experiment and quantum theory do not occur.

Einführung

1935 veröffentlichten Einstein, Podolsky und Rosen [1] ein Gedankenexperiment, dessen Schlußfolgerungen im Widerspruch zur Quantentheorie zu sein schienen. Zur Vermeidung dieser paradoxen Aussagen, die die gleichzeitige Objektivierung inkommensurabler Observabler und ihre Messung ohne die Anwendung eines materiellen Meßprozesses zum Inhalt hatten, sind später eine Reihe von Versuchen gemacht worden, die aufgetretenen Widersprüche durch eine Erweiterung oder Abänderung der Quantentheorie aufzulösen [2]. Vor kurzem hat Mittelstaedt [3] in seiner Arbeit über das EPR-Gedankenexperiment gezeigt, daß die Ergebnisse dieses Experiments durchaus mit der orthodoxen Interpretation der Quantentheorie verträglich sind und sich im Rahmen dieser Theorie auch formal ableiten lassen. Zu einer Abänderung oder Erweiterung der Quantentheorie besteht entsprechend diesem Ergebnis keine Veranlassung.

In dieser Arbeit wollen wir die Schlußfolgerungen des EPR-Gedankenexperiments, die für dieses Experiment in der Formulierung von Bohm und Aharonov [4] – wo zwei Spin-$\frac{1}{2}$-Systeme betrachtet werden – von Mittelstaedt [3] bereits formal bestätigt worden sind, auf Systeme mit beliebigem ganz- oder halbzahligen Drehimpuls verallgemeinern. Dabei werden wir zeigen, daß sich die scheinbaren Widersprüche zwischen den Schlußfolgerungen des EPR-Gedankenexperiments und der Quantentheorie durch die Beachtung der Symmetrien der betrachteten Teilsysteme und des Gesamtsystems bei der Anwendung der Theorie des quantenmechanischen Meßprozesses auflösen lassen.

Der Meßprozeß

Das Gesamtsystem M + S eines Meßgerätes M und eines Objekts S nennen wir einen Meßprozeß, wenn wir durch Ablesung am Meßgerät Informationen über das Objektsystem gewinnen können. Die Durchführung der Messung einer Observablen A mit der Eigenbasis $|a_k\rangle$ vollzieht sich dabei in mehreren Schritten [5]:

Befindet sich das Meßgerät M im Zustand $|\varphi\rangle_{\mathrm{M}} \in \mathcal{H}_{\mathrm{M}}$ und das Objektsystem S im Zustand $|\psi\rangle_{\mathrm{S}} \in \mathcal{H}_{\mathrm{S}}$, so ist bei der Vereinigung beider Systeme der Zustand des Gesamtsystems M + S durch das Tensorprodukt

$$|\Phi\rangle_{\mathrm{M+S}} = |\varphi\rangle_{\mathrm{M}} \otimes |\psi\rangle_{\mathrm{S}} = \sum_k a_k \, |\varphi\rangle_{\mathrm{M}} \otimes |a_k\rangle \in \mathcal{H}_{\mathrm{M}} \otimes \mathcal{H}_{\mathrm{S}}$$

gegeben.

Zur Zeit $t=0$ werde eine Wechselwirkung zwischen dem Meßgerät und dem Objekt eingeschaltet, die durch den Wechselwirkungsoperator H_{w} beschrieben wird. Der Zustand des Gesamtsystems $|\Phi\rangle_{\mathrm{M+S}}$ unterliegt dann im Wechselwirkungsbild der Zeitentwicklung

$$|\Phi(t)\rangle_{\mathrm{M+S}} = e^{i H_{\mathrm{w}} t} \, |\Phi(t=0)\rangle_{\mathrm{M+S}} = e^{i H_{\mathrm{w}} t} \, |\Phi\rangle_{\mathrm{M+S}} \, .$$

Nach dem Abschalten der Wechselwirkung zu einer Zeit $t'>0$ befindet sich das Gesamtsystem M + S dann in dem Zustand

$$|\Phi(t')\rangle_{\mathrm{M+S}} = e^{i H_{\mathrm{w}} t'} \, |\Phi(t=0)\rangle_{\mathrm{M+S}} = \sum_k e^{i H_{\mathrm{w}} t'} a_k \, |\varphi\rangle_{\mathrm{M}} \otimes |a_k\rangle_{\mathrm{S}} \, .$$

Ist das Meßgerät beliebig empfindlich (d. h. ein Meßgerät „erster Art"), dann bleiben die Zustände

* Diese Arbeit wurde mit Unterstützung der Deutschen Forschungsgemeinschaft ausgeführt.

Sonderdruckanforderungen an Dr. M. Weber, Institut für Theoretische Physik der Universität zu Köln, Zülpicherstr. 77, *D-5000 Köln 41 (West Germany)*.

$|a_k\rangle_S$ ungestört, und es liegt der Gesamtzustand

$$|\Phi(t')\rangle_{M+S} = \sum_k \beta_k |\varphi_k\rangle_M \otimes |a_k\rangle_S$$

vor.

Zwar sind die Zustände des Meßgerätes $|\varphi_k\rangle_M$ nach dem Abschalten der Wechselwirkung von den Meßwerten a_k der Observablen A und damit von den Eigenzuständen $|a_k\rangle_S$ abhängig, doch können umgekehrt die Meßwerte a_k aus den Zuständen des Meßgerätes nur dann eindeutig festgelegt werden, wenn diese orthogonal zueinander sind

$$_M\langle\varphi_i|\varphi_k\rangle = \delta_{ik}\,.$$

In diesem Falle liegt dann ein Meßgerät vor, das geeignet ist, die Observable A an dem Objektsystem S zu messen (ideales Meßgerät).

Die Korrelationen zwischen den Zuständen des Objektsystems $|a_k\rangle_S$ und den zugehörigen Zuständen des Meßgeräts $|\varphi_k\rangle_M$ lassen sich formal durch eine antilineare Abbildung F, die den Hilbert-Raum $\mathcal{H}_S$ auf den Hilbert-Raum $\mathcal{H}_M$ abbildet, und die zugehörige adjungierte Abbildung F^+ ausdrücken [6, 7]

$$F\,|a_k\rangle_S = {}_S\langle a_k|\Phi(t')\rangle_{M+S} \in \mathcal{H}_M\,,$$
$$F^+\,|\varphi_k\rangle_M = {}_M\langle\varphi_k|\Phi(t')\rangle_{M+S} \in \mathcal{H}_S\,.$$

Diese Abbildung beschreibt auch den entscheidenden Schritt des Meßprozesses, nämlich die Reduktion des Gesamtsystems M + S auf das Objektsystem S, dem unser eigentliches Interesse gilt. Diese Projektion auf den Hilbert-Raum $\mathcal{H}_S$ überführt den Zustand von S in das Gemisch

$$|\psi\rangle_S \to (\psi; A)_S = \sum_k |a_k\rangle_S\, {}_S\langle a_k|\psi\rangle_S\, {}_S\langle\psi|a_k\rangle_S\, {}_S\langle a_k|$$
$$= \sum_k P[a_k]\cdot P[\psi]\cdot P[a_k]\,,$$

das auch durch den Operator [6, 7]

$$(\psi; A)_S = F^+ F$$

dargestellt werden kann. Durch diese Isolation des Objekts vom Meßgerät werden alle Interferenzen zwischen beiden Systemen unterdrückt, und die Observable A wird objektiv in S. Im letzten Schritt des Meßprozesses kann dann der Meßwert von A am Meßgerät einfach abgelesen werden.

Liegt der besondere Fall vor, daß das bei der Messung der Observablen A entstandene Gemisch wieder ein reiner Zustand ist

$$(\psi; A)_S = \sum_k P[a_k]\cdot P[\psi]\cdot P[a_k]$$
$$= P[\psi] = |\psi\rangle_S\,\langle\psi|\,,$$

so wird die Observable A als objektiv in $|\psi\rangle_S$ bezeichnet.

Auch in der Verallgemeinerung, daß das Objektsystem S vor der Messung nicht in einem reinen Zustand, sondern in einem Gemisch mit dem Dichte-Operator W vorliegt, können wir die vorstehende Theorie des Meßprozesses anwenden. Bei der Messung von A wird W in das Gemisch

$$(W; A)_S = \sum_k P[a_k]\, W\, P[a_k]$$

überführt. In diesem Falle wird die Observable als objektiv in W bezeichnet, wenn das Gemisch bei der Messung von A nicht geändert wird

$$(W; A)_S = W\,.$$

Das Gedankenexperiment

Wir betrachten zwei isolierte Bose- oder Fermi-Systeme S_I und S_{II} mit den Gesamtdrehimpulskomponenten $J_I(\vartheta)$ und $J_{II}(\vartheta)$ von gleicher Länge J. Die zu S_I und S_{II} gehörenden Zustandsvektoren wollen wir mit $|\varphi\rangle_I \in \mathcal{H}_I$ bzw. $|\psi\rangle_{II} \in \mathcal{H}_{II}$ bezeichnen und im besonderen die Eigenvektoren zu den $(2J+1)$ verschiedenen Eigenwerten von $J_I(\vartheta)$ bzw. $J_{II}(\vartheta)$ durch $|\varphi_j(\vartheta)\rangle_I$ bzw. $|\psi_j(\vartheta)\rangle_{II}$ darstellen.

Beide Systeme denken wir uns zu einem Gesamtsystem $S_I + S_{II}$ mit dem Gesamtdrehimpuls $J_I(\vartheta) + J_{II}(\vartheta) = 0$ vereinigt, dessen Zustandsraum durch das Tensorprodukt $\mathcal{H}_I \otimes \mathcal{H}_{II}$ gegeben ist. Für eine gewisse Zeitspanne mögen beide Systeme einer gemeinsamen Wechselwirkung, die den Drehimpuls erhält, unterliegen. Nach einiger Zeit soll dann die Wechselwirkung abgeschaltet werden; beide Teilsysteme S_I und S_{II} sollen dann auch räumlich separiert sein, so daß keine materielle Beeinflussung zwischen den beiden Systemen mehr möglich ist. Anschließend möge sich das Gesamtsystem $S_I + S_{II}$ in dem Zustand $|\Phi(\vartheta)\rangle_{I+II}$ befinden, der im Falle zweier Bose-Systeme aus einer vollständig symmetrisierten Überlagerung

$$|\Phi(\vartheta)\rangle^B_{I+II} = \frac{1}{\sqrt{2J+1}} \sum_{j=-J}^{J} |\varphi_j(\vartheta)\rangle_I \otimes |\psi_{-j}(\vartheta)\rangle_{II} = \frac{1}{\sqrt{2J+1}} \sum_{j=-J}^{J} |\Phi_{j,-j}(\vartheta)\rangle_{I+II}$$

und im Falle zweier Fermi-Systeme aus einer total antisymmetrisierten Überlagerung

$$
\begin{aligned}
|\Phi(\vartheta)\rangle^{\mathrm{F}}_{\mathrm{I+II}} &= \frac{1}{\sqrt{2J+1}} \sum_{j=-(J+1)}^{J} (-1)^j \, |\varphi_{\frac{1}{2}(2j+1)}(\vartheta)\rangle_{\mathrm{I}} \otimes |\psi_{-\frac{1}{2}(2j+1)}(\vartheta)\rangle_{\mathrm{II}} \\
&= \frac{1}{\sqrt{2J+1}} \sum_{j=-(J+1)}^{J} (-1)^j \, |\Phi_{\frac{1}{2}(2j+1),-\frac{1}{2}(2j+1)}(\vartheta)\rangle_{\mathrm{I+II}}
\end{aligned}
$$

der Zustände $|\Phi_{j,-j}(\vartheta)\rangle_{\mathrm{I+II}}$ besteht.

Diese Präparation des Gesamtsystems $S_{\mathrm{I}}+S_{\mathrm{II}}$ läßt eine Reihe von Folgerungen zu, die scheinbar im Widerspruch zur Quantentheorie stehen:

Wird an dem System S_{I} die Drehimpulskomponente $J_{\mathrm{I}}(\vartheta)$ gemessen, und liefert diese Messung den Meßwert j, so ist wegen der Festlegung des Gesamtdrehimpulses $J_{\mathrm{I}}(\vartheta)+J_{\mathrm{II}}(\vartheta)=0$ sicher, daß eine Messung von $J_{\mathrm{II}}(\vartheta)$ an dem System S_{II} den Meßwert $-j$ liefern wird. Da auf Grund der besonderen Präparation des Gesamtsystems jegliche Wechselwirkung zwischen den beiden Teilsystemen ausgeschlossen ist, kann ein Eingriff in das System S_{I} durch die Messung von $J_{\mathrm{I}}(\vartheta)$ keinen Einfluß auf das System S_{II} haben, so daß der Meßwert $-j$ von $J_{\mathrm{II}}(\vartheta)$ bereits vor der Messung festgelegt gewesen sein muß. Statt der Drehimpulskomponenten $J(\vartheta)$ können wir die gleichen Schlußfolgerungen bei der Messung der Drehimpulskomponenten $J(\vartheta')$ in einer beliebigen anderen Richtung ϑ' ziehen. Damit erhalten wir, daß die Observablen $J_{\mathrm{II}}(\vartheta)$ und $J_{\mathrm{II}}(\vartheta')$, deren gemeinsamer Kommutator $[J_{\mathrm{II}}(\vartheta), J_{\mathrm{II}}(\vartheta')]_-$ nicht verschwindet, simultan objektivierbar sind.

Die Untersuchungen von Mittelstaedt [3] ergaben, daß diese Schlußfolgerungen keineswegs der Quantentheorie widersprechen. Die formale Anwendung der Theorie des quantenmechanischen Meßprozesses auf das Gesamtsystem zweier Spin-$\frac{1}{2}$-Systeme, das durch den Zustand

$$|\Phi(\vartheta)\rangle_{\mathrm{I+II}} = |\Phi_{1,-1}(\vartheta)\rangle_{\mathrm{I+II}} - |\Phi_{-1,1}(\vartheta)\rangle_{\mathrm{I+II}}$$

repräsentiert wird, zeigte, daß die beiden Teilsysteme S_{I} und S_{II} sowohl vor der Messung der Spin-Komponenten $J_{\mathrm{I}}(\vartheta)$ als auch nachher sich in einem vollständig entarteten Gemisch

$$
\begin{aligned}
W_{\mathrm{I}} &= \tfrac{1}{2} P[\varphi_1(\vartheta)] + \tfrac{1}{2} P[\varphi_{-1}(\vartheta)]\,, \\
W_{\mathrm{II}} &= \tfrac{1}{2} P[\psi_1(\vartheta)] + \tfrac{1}{2} P[\psi_{-1}(\vartheta)]
\end{aligned}
$$

befinden; weiter zeigte es sich, daß die Messung einer Spin-Komponenten $J_{\mathrm{I}}(\vartheta')$ in einer beliebigen Richtung ϑ' das Gemisch $W_{\mathrm{I}} = (W_{\mathrm{I}}; J_{\mathrm{I}}(\vartheta))$ nicht verändert, so daß der Meßwert jeder beliebigen Spin-Komponenten $J_{\mathrm{I}}(\vartheta')$ schon vor der Messung objektiv vorgelegen haben muß. Die gleichzeitige Objektivierbarkeit der verschiedenen Spin-Komponenten läßt sich dabei darauf zurückführen, daß die vollständig entarteten Gemische, die die beiden Teilsysteme S_{I} und S_{II} repräsentieren, bei jeder Spin-Messung in sich selbst überführt werden

$$(W_{\mathrm{I}}; J_{\mathrm{I}}(\vartheta'))_{\mathrm{I}} = W_{\mathrm{I}}\,, \quad (W_{\mathrm{II}}; J_{\mathrm{I}}(\vartheta'))_{\mathrm{II}} = W_{\mathrm{II}}\,.$$

Zur Verallgemeinerung des EPR-Gedankenexperiments wollen wir vorbereitend die Symmetrieeigenschaften der Systeme S_{I}, S_{II} sowie $S_{\mathrm{I}}+S_{\mathrm{II}}$ betrachten.

Von den beiden Teilsystemen S_{I} und S_{II} nehmen wir an, daß sie einen ganzzahligen oder einen halbzahligen Drehimpuls besitzen und also entweder Bose- oder Fermi-Systeme sind. Bei einer Vertauschung der beiden Teilsysteme bleibt der Zustand $|\Phi(\vartheta)\rangle_{\mathrm{I+II}}$ von $S_{\mathrm{I}}+S_{\mathrm{II}}$ also unverändert (Bosonen) oder er wechselt sein Vorzeichen (Fermionen). Die Permutation der Teilsysteme hat in beiden Fällen keinen Einfluß auf die Meßwerte, so daß es gleichgültig ist, ob die Messungen von $J(\vartheta)$ an S_{I} oder an S_{II} durchgeführt werden. Der Gesamtzustand $|\Phi(\vartheta)\rangle_{\mathrm{I+II}}$ muß also aus einer total symmetrischen (Bosonen) oder antisymmetrischen (Fermionen) Überlagerung der Zustände

$$|\varphi_k(\vartheta)\rangle_{\mathrm{I}} \otimes |\psi_k(\vartheta)\rangle_{\mathrm{II}}$$

bestehen. Als einzige Observable wurde bei der Präparation des Gesamtsystems der Drehimpuls zu $J_{\mathrm{I}}(\vartheta)+J_{\mathrm{II}}(\vartheta)=0$ festgelegt. Daher ist $S_{\mathrm{I}}+S_{\mathrm{II}}$ invariant gegen Raumdrehungen, und wir können den Gesamtzustand in der angegebenen Form

$$|\Phi(\vartheta)\rangle^{\mathrm{B}}_{\mathrm{I+II}} \frac{1}{\sqrt{2J+1}} \sum_{j=-J}^{J} |\Phi_{j,-j}(\vartheta)\rangle_{\mathrm{I+II}}$$

für Bosonen und

$$
\begin{aligned}
|\Phi(\vartheta)\rangle^{\mathrm{F}}_{\mathrm{I+II}} = \frac{1}{\sqrt{2J+1}} &\sum_{j=-J}^{J} \\
&\cdot (-1)^j \, |\Phi_{\frac{1}{2}(2j+1),-\frac{1}{2}(2j+1)}(\vartheta)\rangle_{\mathrm{I+II}}
\end{aligned}
$$

für Fermionen festlegen.

Die beiden Teilsysteme unterliegen ebenfalls der Invarianz gegen Raumdrehungen. Die Reduktionen des Gesamtsystems $S_{\mathrm{I}}+S_{\mathrm{II}}$ auf die Systeme S_{I} und S_{II} müssen also rotationsinvariante Dichte-Operatoren ergeben. Allein auf Grund dieser Symmetrieeigenschaften ist also zu verstehen, daß die Dichte-

Operatoren der beiden Teilsysteme die Form

$$W_{\mathrm{I}}=\frac{1}{2J+1}\sum_{j=-J}^{J}P[\varphi_j]\,;\quad W_{\mathrm{II}}=\frac{1}{2J+1}\sum_{j=-J}^{J}P[\psi_j]$$

haben und also ein Vielfaches des Einheitsoperators sind

$$W_{\mathrm{I}}=\frac{1}{2J+1}\,i\,d_{\mathrm{I}}\,,\qquad W_{\mathrm{II}}=\frac{1}{2J+1}\,i\,d_{\mathrm{II}}\,.$$

Eine weitere wichtige Eigenschaft der betrachteten Systeme ist ihr Verhalten unter der Zeitumkehr-Transformation T, das wir allein wegen der Festlegung des Gesamtdrehimpulses angeben können. Entsprechend der Präparation des Gesamtsystems ist $J_{\mathrm{I}}(\vartheta)+J_{\mathrm{II}}(\vartheta)=0$, so daß der Gesamtdrehimpuls mit dem Zeitumkehr-Operator vertauscht. Das Gesamtsystem $S_{\mathrm{I}}+S_{\mathrm{II}}$ ist also invariant gegen Zeitumkehrung, während sich die Teilsysteme zumindest bez. ihrer Drehimpulseigenschaften zeitumkehrtransformiert verhalten

$$T^{+}J_{\mathrm{I}}(\vartheta)T=-J_{\mathrm{I}}(\vartheta)=J_{\mathrm{II}}(\vartheta)\,.$$

Da wir neben der Angabe der Drehimpulse der beiden Teilsysteme S_{I} und S_{II} keine weiteren Annahmen über diese Systeme gemacht haben und auch keine weiteren Annahmen im Rahmen des EPR-Gedankenexperiments benötigen, können wir ohne Einschränkung annehmen, daß die beiden Teilsysteme sich durch eine Zeitumkehr-Transformation aufeinander abbilden lassen

$$T\,|\,\varphi_j(\vartheta)\,\rangle_{\mathrm{I}}\sim|\,\varphi_{-j}(\vartheta)\,\rangle_{\mathrm{I}}\sim|\,\psi_{-j}(\vartheta)\,\rangle_{\mathrm{II}}\,,$$

und es ist gerade der Aspekt des Verhaltens der beiden Teilsysteme unter der Zeitumkehr-Transformation, der in den folgenden Betrachtungen dominieren wird.

Die Durchführung des EPR-Gedankenexperimentes

Bei der Messung der Drehimpulskomponenten $J_{\mathrm{I}}(\vartheta')$ an dem System S_{I} wird dieses System und damit auch das Gesamtsystem $S_{\mathrm{I}}+S_{\mathrm{II}}$ beeinflußt, während das System S_{II} von diesem Eingriff nicht betroffen wird. Wir haben also bei der Anwendung der formalen Theorie des Meßprozesses statt der Meßgröße $J_{\mathrm{I}}(\vartheta')$ die auf das Gesamtsystem bezogene Größe $J_{\mathrm{I}}(\vartheta')\otimes i\,d_{\mathrm{II}}$ zu betrachten. Durch die Messung der Observablen $J_{\mathrm{I}}(\vartheta')\otimes i\,d_{\mathrm{II}}$ wird der Zustand $|\Phi(\vartheta)_{\mathrm{I+II}}\rangle$ des Gesamtsystems in das Gemisch

$$|\,\Phi(\vartheta)\,\rangle_{\mathrm{I+II}}\rightarrow(\Phi(\vartheta)\,;\,J_{\mathrm{I}}(\vartheta')\otimes i\,d_{\mathrm{II}})_{\mathrm{I+II}}=\sum_{j=-J}^{J}P[\varphi_j(\vartheta')\otimes i\,d_{\mathrm{II}}]\cdot P[\Phi(\vartheta)]\cdot P[\varphi_j(\vartheta')\otimes i\,d_{\mathrm{II}}]$$

überführt. Die explizite Ausrechnung dieses Gemisches ist für Bose- und Fermi-Systeme getrennt durchzuführen.

Im Falle zweier Bose-Systeme S_{I} und S_{II} können wir dieses Gemisch in der Diracschen Ket-Schreibweise als

$$(\Phi(\vartheta)^{\mathrm{B}};\,J_{\mathrm{I}}(\vartheta')\otimes i\,d_{\mathrm{II}})=\sum_{j,k,l,m=-J}^{J}|\,\Phi_{j,k}(\vartheta')\,\rangle_{\mathrm{I+II}}\langle\,\Phi_{j,k}(\vartheta')\,|\,\Phi_{l,-l}(\vartheta)\,\rangle_{\mathrm{I+II}}\,\langle\,\Phi_{m,-m}(\vartheta)\,|\,\Phi_{j,k}(\vartheta')\,\rangle_{\mathrm{I+II}}\,\langle\,\Phi_{j,k}(\vartheta')\,|$$

schreiben. Die Eigenschaften des so entstandenen Gemisches sind dabei durch die Gewichte der einzelnen Projektoren und somit durch die Matrixelemente

$$\begin{aligned}\sum_{l=-J}^{J}{}_{\mathrm{I+II}}\langle\,\Phi_{j,k}(\vartheta')\,|\,\Phi_{l,-l}(\vartheta)\,\rangle_{\mathrm{I+II}}&=\sum_{l=-J}^{J}{}_{\mathrm{I}}\langle\varphi_j(\vartheta')\,|\,\varphi_l(\vartheta)\,\rangle_{\mathrm{I}}\cdot{}_{\mathrm{II}}\langle\psi_k(\vartheta')\,|\,\psi_{-l}(\vartheta)\,\rangle_{\mathrm{II}}\\&=\sum_{l=-J}^{J}{}_{\mathrm{I}}\langle\varphi_j(\vartheta)\,|\,D(\vartheta'-\vartheta)\,|\,\varphi_l(\vartheta)\,\rangle_{\mathrm{I}}\cdot{}_{\mathrm{II}}\langle\psi_k(\vartheta)\,|\,D(\vartheta'-\vartheta)\,|\,\psi_{-l}(\vartheta)\,\rangle_{\mathrm{II}}=\sum_{l=-J}^{J}D_{j,l}(\vartheta'-\vartheta)\cdot D_{k,-l}(\vartheta'-\vartheta)\end{aligned}$$

des Drehoperators $D(\vartheta'-\vartheta)$ bestimmt, der eine Drehung um den Winkel $\vartheta'-\vartheta$ um die y-Achse bez. der Basis der Eigenvektoren zu den $2J+1$ verschiedenen Eigenvektoren von $J_{\mathrm{I,II}}(\vartheta)$ beschreibt. Die Anwendung der Zeitumkehr-Transformation auf die Zustände des Systems S_{II}, mit der wir das System S_{II} auf das System S_{I} vor der Messung abbilden können,

$${}_{\mathrm{II}}\langle\,\psi_k(\vartheta)\,|\,D(\vartheta'-\vartheta)\,|\,\psi_{-l}(\vartheta)\,\rangle_{\mathrm{II}}={}_{\mathrm{II}}\langle\,\psi_k(\vartheta)\,|\,D(\vartheta'-\vartheta)\;[T^{+}\cdot T\,|\,\psi_{-l}(\vartheta)\,\rangle_{\mathrm{II}}]$$

ermöglicht die weitere Auswertung dieser Koeffizienten. Unter Berücksichtigung der Invarianz von Raumdrehungen bei Zeitumkehr

$$={}_{\mathrm{II}}\langle\,\psi_k(\vartheta)\,|\,[T^{+}D(\vartheta'-\vartheta)T\,|\,\psi_{-l}(\vartheta)\,\rangle_{\mathrm{II}}]\,,$$

der Antilinearität des Zeitumkehr-Operators T

$$= [{}_{\mathrm{II}}\langle \psi_k(\vartheta) | T^+] [D(\vartheta' - \vartheta) T | \psi_{-l}(\vartheta) \rangle_{\mathrm{II}}]^*$$

(* bedeutet dabei Komplex-Konjugation)

und der Inversion des Drehimpulses bei Anwendung der Zeitumkehr-Transformation

$$= {}_{\mathrm{II}}\langle \psi_{-k}(\vartheta) | D(\vartheta' - \vartheta) | \psi_l(\vartheta) \rangle_{\mathrm{II}}^* = D^*_{-k,l}(\vartheta' - \vartheta) = D^+_{l,-k}(\vartheta' - \vartheta)$$

($^+$ bedeutet dabei Hermite-Adjunktion)

erhalten wir wegen der Unitarität der Drehoperatoren

$$\sum_{l=-J}^{J} {}_{\mathrm{I+II}}\langle \Phi_{j,k}(\vartheta') | \Phi_{l,-l}(\vartheta) \rangle_{\mathrm{I+II}} = \sum_{l=-J}^{J} D_{j,l}(\vartheta' - \vartheta) \cdot D^+_{l,-k}(\vartheta' - \vartheta) = \delta_{j,-k},$$

daß alle Projektoren des Gemisches gleichermaßen gewichtet sind

$$(\Phi(\vartheta)^{\mathrm{B}}; J_{\mathrm{I}}(\vartheta') \otimes i\, d_{\mathrm{II}}) = \sum_{j,k=-J}^{J} | \Phi_{j,k}(\vartheta') \rangle_{\mathrm{I+II}} \langle \Phi_{j,k}(\vartheta') | \cdot \delta_{j,-k} = \sum_{j=-J}^{J} | \Phi_{j,-j}(\vartheta') \rangle_{\mathrm{I+II}} \langle \Phi_{j,-j}(\vartheta') | .$$

Bei dieser Messung wird also das Gesamtsystem $S_{\mathrm{I}} + S_{\mathrm{II}}$ in ein Gemisch überführt, das bezüglich aller Zustände, die der Bedingung $J_{\mathrm{I}}(\vartheta') + J_{\mathrm{II}}(\vartheta') = 0$ genügen, entartet ist. Die Bedingung an den Gesamtdrehimpuls wird dabei durch die strenge Korrelation der Meßwerte garantiert: Ergibt die Messung von $J_{\mathrm{I}}(\vartheta')$ am System S_{I} den Meßwert j, wird also bez. des Systems S_{I} der Zustand $|\varphi_j(\vartheta')\rangle_{\mathrm{I}}$ und damit bez. des Gesamtsystems $S_{\mathrm{I}} + S_{\mathrm{II}}$ der Zustand $|\varphi_j(\vartheta')\rangle_{\mathrm{I}} \otimes |\psi_{-j}(\vartheta')\rangle_{\mathrm{II}}$ realisiert, so wissen wir dann auf Grund dieser strengen Korrelation, daß eine nachfolgende Messung von $J_{\mathrm{II}}(\vartheta')$ an dem System S_{II} den Meßwert $-j$ ergibt.

Bei der Betrachtung zweier Fermi-Systeme S_{I} und S_{II} haben wir die Antisymmetrie des Zustands $|\Phi(\vartheta)\rangle^{\mathrm{F}}_{\mathrm{I+II}}$ des Gesamtsystems $S_{\mathrm{I}} + S_{\mathrm{II}}$ bei Vertauschung der Teilsysteme zu berücksichtigen, so daß das bei der Messung von $J_{\mathrm{I}}(\vartheta')$ am System S_{I} entstandene Gemisch in Dirac-Schreibweise durch den Dichte-Operator

$$\begin{aligned}(\Phi(\vartheta)^{\mathrm{F}}; J_{\mathrm{I}}(\vartheta') \otimes i\, d_{\mathrm{II}}) &\\ = \sum_{j,k,l,m=-(J+1)}^{J} (-1)^{l+m} &| \Phi_{\frac{1}{2}(2j+1),\frac{1}{2}(2k+1)}(\vartheta') \rangle_{\mathrm{I+II}} \langle \Phi_{\frac{1}{2}(2j+1),\frac{1}{2}(2k+1)}(\vartheta') | \Phi_{\frac{1}{2}(2l+1),-\frac{1}{2}(2l+1)}(\vartheta) \rangle_{\mathrm{I+II}} \\ &\cdot {}_{\mathrm{I+II}}\langle \Phi_{\frac{1}{2}(2m+1),-\frac{1}{2}(2m+1)}(\vartheta) | \Phi_{\frac{1}{2}(2j+1),\frac{1}{2}(2k+1)}(\vartheta') \rangle_{\mathrm{I+II}} \langle \Phi_{\frac{1}{2}(2j+1),\frac{1}{2}(2k+1)}(\vartheta') |\end{aligned}$$

mit

$$\begin{aligned}&\sum_{l=-(J+1)}^{J} (-1)^l \langle \Phi_{\frac{1}{2}(2j+1),\frac{1}{2}(2k+1)}(\vartheta') | \Phi_{\frac{1}{2}(2l+1),-\frac{1}{2}(2l+1)}(\vartheta) \rangle \\ &\quad = \sum_{l=-(J+1)}^{J} (-1)^l\, {}_{\mathrm{I}}\langle \varphi_{\frac{1}{2}(2j+1)}(\vartheta') | \varphi_{\frac{1}{2}(2l+1)}(\vartheta) \rangle_{\mathrm{I}} \cdot {}_{\mathrm{II}}\langle \psi_{\frac{1}{2}(2k+1)}(\vartheta') | \psi_{-\frac{1}{2}(2l+1)}(\vartheta) \rangle_{\mathrm{II}}\end{aligned}$$

beschrieben wird. Die Matrixelemente des Drehoperators $D(\vartheta' - \vartheta)$

$$(-1)^l\, {}_{\mathrm{II}}\langle \psi_{\frac{1}{2}(2k+1)}(\vartheta) | D(\vartheta' - \vartheta) | \psi_{-\frac{1}{2}(2l+1)}(\vartheta) \rangle_{\mathrm{II}} = (-1)^l D_{\frac{1}{2}(2k+1),-\frac{1}{2}(2l+1)}(\vartheta' - \vartheta)$$

transformieren sich unter Zeitumkehr folgendermaßen

$$\begin{aligned}&(-1)^l D_{\frac{1}{2}(2k+1),-\frac{1}{2}(2l+1)}(\vartheta' - \vartheta) \\ &\quad = (-1)^l (-i)^{-(2l+1)+(2k+1)} D^*_{-\frac{1}{2}(2k+1),\frac{1}{2}(2l+1)}(\vartheta' - \vartheta) = (-1)^k D^+_{\frac{1}{2}(2l+1),-\frac{1}{2}(2k+1)}(\vartheta' - \vartheta), \\ &\quad \sum_{l=-(J+1)}^{J} (-1)^k D_{\frac{1}{2}(2j+1),\frac{1}{2}(2l+1)}(\vartheta' - \vartheta) \cdot D^+_{\frac{1}{2}(2l+1),-\frac{1}{2}(2k+1)}(\vartheta' - \vartheta) = (-1)^k \delta_{j,-k}.\end{aligned}$$

Auch in diesem Falle erhalten wir also wegen der Unitarität der Drehoperatoren ein vollständig entartetes Gemisch

$$(\Phi(\vartheta)^F; J_{\mathrm{I}}(\vartheta') \otimes i\, d_{\mathrm{II}}) = \sum_{j=-(J+1)}^{J} | \Phi_{\frac{1}{2}(2j+1),-\frac{1}{2}(2j+1)}(\vartheta') \rangle_{\mathrm{I+II}} \langle \Phi_{\frac{1}{2}(2j+1),-\frac{1}{2}(2j+1)}(\vartheta') | .$$

Bilden wir die Reduktionen dieses Gemisches, das das Gesamtsystem $S_{\mathrm{I}}+S_{\mathrm{II}}$ darstellt, auf die beiden Teilsysteme S_{I} und S_{II}. (Dabei brauchen wir nicht mehr zwischen Bosonen und Fermionen zu unterscheiden, da in beiden Fällen alle Gemisch-Operatoren die gleiche Form haben.)

$$\mathrm{Sp}_{\mathrm{II}}\,(\Phi(\vartheta)\,;\,\mathrm{J}_{\mathrm{I}}(\vartheta')\otimes i\,d_{\mathrm{II}}) = \sum_{j=-J}^{J} P[\varphi_j(\vartheta')] = i\,d_{\mathrm{I}}\,,$$

$$\mathrm{Sp}_{\mathrm{I}}\,(\Phi(\vartheta)\,;\,J_{\mathrm{I}}(\vartheta')\otimes i\,d_{\mathrm{II}}) = \sum_{j=-J}^{J} P[\psi_j(\vartheta')] = i\,d_{\mathrm{II}}\,,$$

so sehen wir, daß sich beide Teilsysteme in vollständig entarteten Gemischen befinden. Im Vergleich mit den Reduktionen des Gesamtzustandes $|\Phi(\vartheta)\rangle_{\mathrm{I+II}}$ vor der Messung

$$\mathrm{Red}_{\mathrm{I}}\,[\,|\,\Phi(\vartheta)\,\rangle_{\mathrm{I+II}}] \cong W_{\mathrm{I}} \cong i\,d_{\mathrm{I}}\,,$$
$$\mathrm{Red}_{\mathrm{II}}\,[\,|\,\Phi(\vartheta)\,\rangle_{\mathrm{I+II}}] \cong W_{\mathrm{II}} \cong i\,d_{\mathrm{II}}\,,$$

sehen wir außerdem, daß beide Teilsysteme S_{I} und S_{II} wie erwartet bei der Messung von $J_{\mathrm{I}}(\vartheta')$ nicht geändert worden sind, da ihr Dichte-Operator im wesentlichen durch die Identität

$$W_{\mathrm{I}} = i\,d_{\mathrm{I}}/(2\,J+1)\,i\,d_{\mathrm{I}}\,; \quad W_{\mathrm{II}} = i\,d_{\mathrm{II}}/(2\,J+1)\,i\,d_{\mathrm{II}}$$

gegeben ist.

Auf Grund dieses Ergebnisses lassen sich die Argumente, mit denen Mittelstaedt [3] die Schlußfolgerungen des EPR-Gedankenexperimentes für zwei Spin-$\frac{1}{2}$-Systeme bewiesen hat, auf Systeme mit beliebigem Drehimpuls übernehmen: Auf Grund der vollständigen Entartung der beiden Teilsysteme S_{I} und S_{II} lassen sich beliebige inkommensurable Drehimpulskomponenten $J_{\mathrm{II}}(\vartheta)$ und $J_{\mathrm{II}}(\vartheta')$ simultan objektivieren.

Außerdem können wir bei der Messung einer Drehimpulskomponenten $J_{\mathrm{I}}(\vartheta)$ an dem System S_{I} wegen der strengen Korrelationen im Gesamtzustand den Meßwert der Observablen $J_{\mathrm{II}}(\vartheta)$ ohne materiellen Eingriff an dem System S_{II} bestimmen.

Formal wird dieser Zusammenhang zwischen Meßgerät, als solches sehen wir jetzt das System S_{I} an, und dem Objekt, d. h. dem System S_{II}, wie wir bereits in dem Abschnitt über den Meßprozeß gesehen haben, durch eine antilineare Abbildung F beschrieben [6, 7]. Beim vorliegenden EPR-Gedankenexperiment können wir diese Abbildung sogar explizit angeben

$$|\,\psi_j(\vartheta)\,\rangle_{\mathrm{II}} \to T\,|\,\psi_j(\vartheta)\,\rangle_{\mathrm{II}} \sim |\,\varphi_{-j}(\vartheta)\,\rangle_{\mathrm{I}}$$

und sie mit der Zeitumkehrtransformation T identifizieren. Dieses Gedankenexperiment läßt sich also als ideales Meßgerät interpretieren [7].

Die Reduktion auf die Teilsysteme liefert wegen

$$T^{+}\,T = i\,d_{\mathrm{II}}\,, \quad T\,T^{+} = i\,d_{\mathrm{I}}$$

ebenfalls die vollständige Entartung der Gemische.

Abschließende Bemerkungen

Unsere Betrachtungen über das EPR-Gedankenexperiment für Teilsysteme mit beliebigen Drehimpulskomponenten haben ergeben, daß die Schlußfolgerungen dieses Experiments auch in diesem allgemeinen Fall im Rahmen der Quantentheorie formal verifiziert werden können.

Bei der Anwendung der Theorie des Meßprozesses zeigte es sich, daß nur wenige Symmetrieeigenschaften des Gesamtsystems reichen, die scheinbaren Widersprüche mit der Quantentheorie aufzulösen. Daher können wir in allgemeiner Form angeben, in welchen Systemen die Folgerungen des EPR-Experiments Gültigkeit haben:

Wir betrachten zwei Systeme S_{I} und S_{II} sowie die Observable A_{I} und A_{II} mit diskretem endlichem oder unendlichem Spektrum. Können wir nun die beiden Systeme zu einem Gesamtsystem $S_{\mathrm{I}}+S_{\mathrm{II}}$ mit $A_{\mathrm{I}}+A_{\mathrm{II}}=0$ vereinigen, so sind die Invarianzeigenschaften des Gesamtsystems unter den unitären Transformationen, die von A und allen Operatoren B, die aus A durch unitäre Transformation hervorgehen, erzeugt werden, bestimmend für die Form des Gesamtzustandes; auf Grund der Zeitumkehrinvarianz des Gesamtsystems wissen wir schließlich, daß die Schlußfolgerungen des EPR-Gedankenexperiments gültig sind. Nach einer Messung von A_{I} weiß man dann ohne weitere Messung den Wert von A_{II}, und jede Observable B_{II}, die aus A durch unitäre Transformation hervorgeht, ist simultan mit A_{II} objektivierbar.

Herrn Prof. P. Mittelstaedt möchte ich für seine Unterstützung bei der Entstehung dieser Arbeit danken.

[1] A. Einstein, B. Podolsky u. N. Rosen, Phys. Rev. **47**, 777 [1935].

[2] Eine Übersicht der Arbeiten, das EPR Gedankenexperiment betreffend, findet sich in der Veröffentlichung von Mittelstaedt, vgl. Ref. [3].

[3] P. Mittelstaedt, Z. Naturforsch. **29 a**, 539 [1974].

[4] D. Bohm u. Y. Aharonov, Phys. Rev. **108**, 1070 [1957].

[5] P. Mittelstaedt, Philosophische Probleme der modernen Physik, Bibliographisches Institut Mannheim 1976, S. 100.

[6] J. v. Neumann, Mathematische Grundlagen der Quantenmechanik, Springer-Verlag, Berlin 1932, S. 229.

[7] J. M. Jauch, Foundations of Quantum Mechanics, Addison-Wesley, Reading (Mass.) 1968, S. 181.